Παρασκευή 20/11/2020

Άσκηση 1
Έστω $X_1, X_2, \ldots X_n$ τ.δ από $P(\theta)$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ του θ και θ^2.

Άσκηση 2°
Έστω $X_1, X_2, \ldots X_n$ τ.δ. από $U(0,\theta)$. Να βρεθεί ΑΟΕΔ των θ και $1/\theta$.

Sol) Cramer Rao: Το π.ο της υπο συνθήκη κατανομής δοθέντος του θ πρέπει να είναι ανεξ. του θ.

Κριτήρια Αξιολόγησης εκτιμητών

- Αμεροληψία
- ΑΟΕΔ

Μεθοδολογίες εύρεσης ΑΟΕΔ:

- Κάτω φράγμα Ανισότητα C-R $= \frac{[g'(\theta)]^2}{n I_X(\theta)}$

Πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες ομαλότητας για να μπορούμε να το εφαρμόσουμε.

- ▷ το Π.Ο της $f(x|\theta)$ να είναι ανεξάρτητο του θ
- ▷ "μαντεύουμε" που επιτυγχάνεται το κάτω φράγμα
- ▷ Αν $f(x,\theta)$ είναι της μορφής:
  $f(x,\theta) = c(\theta) h(x) \exp(Q(\theta) T(x))$, $x \in A$ ανεξ. του θ

▷ Το ίσο στην C-R επιτυγχάνεται αν.ν

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \log \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = K(\theta,n)(U-g(\theta))$$

και U είναι ΑΟΕΔ της $g(\theta)$.

▷ με την ανισότητα Cramer Rao μπορούμε να προσδιορίσω ΑΟΕΔ εκτιμητές μόνο γραμμ. συναρτ. της $g(\theta)$ δηλ. της μορφής $ag(\theta)+b$.

Θεώρημα Lehman-Scheffe

Έστω $X_1, X_2, \dots X_n$ από ένα πληθυσμό με σ.π.π ή σπ $f(x|\theta)$. Έστω $T = T(X_1, X_2, \dots X_n)$ επαρκές και πλήρες στατιστικό και $U = U(T)$ αμερόληπτος της $g(\theta)$ τότε U ΑΟΕΔ της $g(\theta)$.

Άσκ 1
Για την θ
Είναι $g(\theta)=\theta$, $[g'(\theta)]^2 = 1$, $p(x,\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}$

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f(x,\theta)\right)$$

Είναι $\log p(x,\theta) = -\theta + x\log\theta - \log x!$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log p(x,\theta) = -1 + \frac{x}{\theta} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p(x,\theta) = \frac{-x}{\theta^2}$$

$$I_X(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log p(x,\theta)\right) = -E\left(\frac{-x}{\theta^2}\right) = \frac{1}{\theta^2}E(X) = \frac{1}{\theta}$$

$K\Phi_{CR} = \frac{1}{n(1/\theta)} = \frac{\theta}{n}$ Αρκεί να βρεθεί εκτιμητής T. της θ με $E(T) = \theta$
και $Var(T) = \frac{\theta}{n}$.

Θεωρούμε $T = \bar{X}$
$E(T) = E(\bar{X}) = \theta$.
$$Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\Sigma X_i\right) = \frac{\Sigma Var X_i}{n^2} = \frac{1}{n^2}\Sigma\theta = \frac{n\theta}{n^2} = \frac{\theta}{n}.$$

Άρα $\bar{X}$ ΑΟΕΔ της θ.

$\boxed{\text{Β' τρόπος:}}$

$f(x,\theta) = e^{-\theta}\frac{1}{x!}e^{x\log\theta}$. Άρα $f(x,\theta)$ ανήκει στην εκθ. οικογ.

και $\frac{\partial}{\partial\theta}\log\prod f(x_i,\theta) = \frac{n}{\theta}\left(\frac{\Sigma x_i}{n} - \theta\right) \Rightarrow \bar{X}$ ΑΟΕΔ της θ.

Για το θ^2

$E(u(T)) = \theta^2$

$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} u(t) \frac{(n\theta)^t e^{-n\theta}}{t!} = \theta^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} u(t) \frac{(n\theta)^t}{t!} = \theta^2 e^{n\theta} = \theta^2 \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(n\theta)^t}{t!}$

$\Rightarrow \sum_{t=0}^{\infty} u(t) \frac{n^t \theta^t}{t!} = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{n^t \theta^{t+2}}{t!} \Rightarrow$

$\sum_{t=0}^{\infty} u(t) \cdot \frac{n^t \theta^t}{t!} = \sum_{t=2}^{\infty} \frac{n^{t-2} \theta^t}{(t-2)!} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(0) + u(1) n\theta + u(2) \frac{n^2\theta^2}{2} + \dots = \theta^2 + \frac{n\theta^3}{1} + \dots$

$\Rightarrow u(0) = u(1) = 0$ και

$u(t) \cdot \frac{n^t}{t!} = \frac{n^{t-2}}{(t-2)!}, \quad t \geq 2$

$u(0) = u(1) = 0$ και $u(t) = \frac{(t-1)t}{n^2}, \quad t \geq 2$

Άρα $\frac{T(T-1)}{n^2} = \frac{T^2-T}{n^2}$ ΑΟΕΔ της θ^2

~~Εφαρμογή Στατιστικής Συνάρτησης~~

Β' τρόπος:

~~Var(T)~~ $E(T^2) = Var(T) + (ET)^2$

Για $T = \sum X_i \sim P(n\theta)$

~~$E(T^2) = Var$~~

$E(T^2) = n\theta + n^2\theta^2 \Rightarrow \frac{E(T^2) - E(T)}{n^2} = \theta^2$

Αρα $\frac{T^2-T}{n^2}$ ΑΟΕΔ εκτιμητής του θ^2

Επαρκής στατιστική συνάρτηση (ορισμός)

Αυτή που περιέχει όλη την πληροφορία, τη διαθέσιμη από το δείγμα για την παράμετρο θ.

T επαρκής για τη θ αν η δεσμευμένη κατανομή $\underset{\sim}{X} | T$ είναι ανεξάρτητη του θ

Πάντα υπάρχει μια στατιστική συνάρτηση η οποία είναι επαρκής και αυτή είναι όλο το δείγμα.

Ασκ. 2

$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta}$, $0<x<\theta$, εξαρτάται από το θ

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} I_{(0,\theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \prod I_{(0,\theta)}(x_i)$$

$$\prod_{i=0}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i) = \begin{cases} 1, & 0<x_{(1)}<x_{(n)}<\theta \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\prod_{i=0}^{n} I_{(0,\theta)}(x_i) = I_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)}) \cdot I_{(0,\theta)}(x_{(n)})$$

$$= \frac{1}{\theta^n} I_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)}) \cdot I_{(0,\theta)}(x_{(n)})$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\theta^n} I_{(0,\theta)}(x_{(n)})}_{g(x_{(n)},\theta)} \cdot \underbrace{I_{(0,x_{(n)})}(x_{(1)})}_{h(x_1,\dots x_n)}$$

Αρα $T(\underset{\sim}{X}) = X_{(n)}$ επαρκές στατιστικό

Αρκεί να δείξω ότι αν $E(\varphi(T)) = 0 \Rightarrow \varphi(T) = 0 \quad \forall T$

$E(\varphi(T)) = \int \varphi(t) f_T(t)\, dt$ απαιτείται ο υπολογισμός της $X_{(n)}$.

Γνωρίζουμε ότι $F_T(t) = \prod_{i=1}^{n} F_X(t) = \left(\frac{t}{\theta}\right)^n, \quad 0<t<\theta$

Άρα $f_T(t) = \frac{n t^{n-1}}{\theta^n}, \quad 0<t<\theta$

$$\int_0^\theta \varphi(t) f_T(t)\, dt = 0 \quad \forall \theta>0$$

$$\Rightarrow \int_0^\theta \varphi(t) \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} dt = 0 \Rightarrow \int_0^\theta \varphi(t)\, t^{n-1} dt = 0$$

Παραγωγίζοντας ως προς θ έχουμε

$$\Rightarrow \varphi(\theta)\theta^{n-1} = 0 \quad \forall \theta>0 \Rightarrow \varphi(\theta) = 0 \quad \forall \theta>0$$

Άρα $X_{(n)}$ πλήρης στατιστική

Αρκεί να βρεθεί συνάρτηση του T που να είναι αμερόληπτη του θ. Δοκιμάζουμε την ίδια την T

$$E(T) = \int_0^\theta t f_T(t)\, dt = \int_0^\theta \frac{t n t^{n-1}}{\theta^n} dt = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta t^n\, dt$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\theta = \frac{n}{n+1}\theta.$$

Επομένως $\frac{(n+1)T}{n} = \frac{(n+1)X_{(n)}}{n}$ αμερόληπτος της θ.

Γενικά

SOS $E(u(T)) = \theta^k \Rightarrow \int_0^\theta u(t) \frac{n t^{n-1}}{\theta^n} dt = \theta^k$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta} u(t)\, t^{n-1}\, dt = \frac{\theta^{n+k}}{n} \Rightarrow u(\theta)\, \theta^{n-1} = \frac{n+k}{n}\, \theta^{n+k-1}$$

$$\Rightarrow u(\theta) = \frac{n+k}{n}\, \theta^{n+k-1} \Rightarrow \boxed{u(T) = \frac{n+k}{n}\, T^{k}}$$

Επομένως για την $\frac{1}{\theta} = \theta^{-1}$ έχουμε $u(T) = \frac{n-1}{n} \frac{1}{T} = \frac{(n-1)}{n X_{(n)}}$

H-W. Άσκηση: X_1, X_2, X_n με σ.π.π $f(\underset{\sim}{x}|\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$
Να βρεθεί ο ΑΟΕΔ της θ.